高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：92.06.02					
範圍	3-3 期望值+Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 單一選擇題 (每題 8 分)

1、(C) 一次丟二粒公正的骰子，其點數和的期望值為 (A) $\frac{7}{3}$ (B) $\frac{7}{2}$ (C)7 (D) $\frac{49}{4}$ (E)21

解析：$\frac{1}{6}\times(1+2+3+4+5+6)=\frac{7}{2}$，$\frac{7}{2}\times 2=7$

2、(C) 二枚公正的銅板分別在其正面貼上“2”，反面貼上“1”，投擲此二枚公正的銅板一次，則兩銅板上數字乘積的期望值為 (A) $\frac{3}{2}$ (B) $\frac{7}{4}$ (C) $\frac{9}{4}$ (D)3 (E)6

解析：

乘 積	1	2	4
機率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

$1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{2}+4\times\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$ 或. $\frac{9}{4}=\frac{3}{2}\times\frac{3}{2}$

3、(C) 擲三個公正的銅板，共出現 K 個正面，約定獎金如下：當 K 為奇數時可得 K^2 元，當 $K=0$ 時要賠 6 元，當 $K=2$ 時要賠 a 元，若希望此遊戲之期望值為 0 元，則 $a=$ (A)-2 (B)0 (C)2 (D)4 (E)6

解析：

K	0	1	2	3
機率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

$1^2\times\frac{3}{8}+3^2\times\frac{1}{8}+(-6)\times\frac{1}{8}+(-a)\times\frac{3}{8}=0$ $\therefore a=2$

4、(D) 一袋中有 100 元鈔票 5 張，500 元鈔票 3 張，1000 元鈔票 2 張，每張大小均相同，自其中任取兩張，其數學期望值為 (A)160 (B)320 (C)400 (D)800 (E) $\frac{3200}{3}$ 元

解析：取一張，$100\times\frac{5}{10}+500\times\frac{3}{10}+1000\times\frac{2}{10}=400$ $400\times 2=800$

5、(B) 一袋中有 1 元鈔票 5 張，5 元鈔票 7 張，10 元鈔票 6 張，20 元鈔票 2 張，每張被取到的機會相同，自其中任取乙張，其數學期望值為 (A)5 (B)7 (C)9 (D)35 (E) $\frac{35}{9}$ 元

解析：$\frac{5}{20}\times 1+\frac{7}{20}\times 5+\frac{6}{20}\times 10+\frac{2}{20}\times 20=7$

6、(A) 袋中有大小相同的 1 到 4 號球各一個，一次由袋中取二球，其球號乘積的期望值為 (A) $\frac{35}{6}$ (B) $\frac{5}{2}$ (C) $\frac{13}{2}$ (D) $\frac{25}{4}$ (E)5

解析：$\frac{1}{6}\times(2+3+4+6+8+12)=\frac{35}{6}$

二. 填充題 (每題 0 分)

1、一次擲出 3 粒公正的骰子，則點數和的期望值爲_______。

答案：$\frac{21}{2}$

解析：$\frac{7}{2}\times 3=\frac{21}{2}$

2、擲一公正骰子 3 次，則出現 2 點之次數的期望值爲_______。

答案：$\frac{1}{2}$

解析：

次數	1	2	3	0
機率	$C_1^3(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^2$	$C_2^3(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})$	$C_3^3(\frac{1}{6})^3$	$\frac{125}{216}$

$1\times C_1^3(\frac{1}{6})(\frac{5}{6})^2+2\times C_2^3(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})+3\times(\frac{1}{6})^3=\frac{1}{2}$

另解：$3\times\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

3、A、B 兩箱中分別放入 5000 元，A 箱中放入 2 張 1000 元、6 張 500 元，B 箱中放入 1 張 1000 元，4 張 500 元，20 張 100 元，在 A 箱中任取 1 張的期望值爲 K_1 元，在 B 箱中任取 3 張其金額總和的期望值爲 K_2 元，則 $K_2=$_______，又 K_1，K_2 之大小關係爲_______。

答案：600, $K_1>K_2$

解析：$K_1=1000\times\frac{2}{8}+500\times\frac{6}{8}=\frac{5000}{8}=625$

$K_2=3\times(1000\times\frac{1}{25}+500\times\frac{4}{25}+100\times\frac{20}{25})=600$ $\quad K_1>K_2$

4、一袋中有大小相同的 8 個代幣，其中 5 個爲 6 元代幣，而其他 3 個爲 K 元代幣，若由袋中一次取出 2 個代幣之期望值爲 15 元，則 $K=$_______。

答案：10

解析：取一個代幣之期望值爲 $6\times\frac{5}{8}+K\times\frac{3}{8}=\frac{30+3K}{8}$, $\frac{30+3K}{8}\times 2=15$ $\quad\therefore K=10$

5、在測驗中，欲使完全不會隨意瞎猜的考生得分的期望值爲 0，因此採用答錯倒扣之計分方式，(1)是非題答對得 4 分，答錯應倒扣_______分，(2)單一選擇題，題中有 5 個選項，其中只有 1 個是正確的選項，若答對得 5 分，答錯應倒扣_______分。

答案：4, $\frac{5}{4}$

解析：(1)是非題倒扣 K 分，$\frac{1}{2}\times 4+\frac{1}{2}\times(-K)=0$ $\quad\therefore K=4$

(2)單一選擇題倒扣 K 分，$\frac{1}{5}\times 5+\frac{4}{5}\times(-K)=0$ $\quad\therefore K=\frac{5}{4}$

6、保險公司售出一年期的住宅房屋火險，設其保險額爲 100 萬元，保險費爲 2000 元，依過

去資料顯示，住宅房屋發生火災的機率為 0.0015，則保險公司的利潤期望值為_______元。

答案：500

解析：$1000000\times 0.0015=1500$, $2000-1500=500$

7、投擲四粒公正的骰子，若出現四粒骰子點數相同時，可得獎金 2160 元，若出現四粒骰子點數相連時，可得獎金 648 元，若出現兩種點數各兩粒時，可得獎金 216 元，則其獎金的期望值為_______元，又發生兩種點數各兩粒之機率為_______。

答案：61, $\dfrac{5}{72}$

解析：

骰子	四同	四粒相連	兩兩相同
機率	$\dfrac{6}{6^4}$	$\dfrac{3\times 4!}{6^4}$	$\dfrac{C_2^6\times\dfrac{4!}{2!2!}}{6^4}$

$$2160\times\frac{1}{216}+648\times\frac{12}{216}+216\times\frac{15}{216}=61,\qquad \frac{C_4^6\times\dfrac{4!}{2!2!}}{6^4}=\frac{5}{72}$$

8、一次擲出 6 粒公正的骰子，若出現點數為五同一異時，可得 6^6 元，其餘不給錢，則其數學期望值為_______元。

答案：180

解析：$\dfrac{C_1^6C_1^5\times\dfrac{6!}{5!}}{6^6}\times 6^6=180$（元）

9、某次測驗考複選題，每題有五個選項，其中正確選項不止一個（即至少有二個正確選項），若完全答對可得 5 分，否則倒扣 K 分，欲使完全不會隨意瞎猜的考生得分的期望值為 0，則 $K=$_______，又正確選項恰有三個的機率為_______。

答案：$\dfrac{1}{5}$, $\dfrac{5}{13}$

解析：已知至少有 2 個正確選項之情形有 $C_2^5+C_3^5+C_4^5+C_5^5=26$

故猜對機率 $\dfrac{1}{26}$，猜錯機率 $\dfrac{25}{26}$，$5\times\dfrac{1}{26}+(-K)\times\dfrac{25}{26}=0\quad \therefore K=\dfrac{1}{5}$

正確選項恰有 3 個的機率為 $\dfrac{C_3^5}{26}=\dfrac{10}{26}=\dfrac{5}{13}$

10、將 4 個球任意分配到 3 個箱子中，則均無空箱之機率為_______，又對空箱個數的數學期望值為_______。

答案：$\dfrac{4}{9}$, $\dfrac{16}{27}$

解析：$4=(2,1,1)$, $\dfrac{C_2^4C_1^2C_1^1\times\dfrac{3!}{2!}}{3^4}=\dfrac{4}{9}$

空箱數	2	1	0
機率	$\dfrac{C_1^3\times 1^4}{3^4}$	$\dfrac{C_1^3(2^4-2)}{3^4}$	$\dfrac{4}{9}$

$$2\times\frac{1}{27}+1\times\frac{14}{27}=\frac{16}{27}$$

11、一袋中藏有 3 個紅球，7 個白球。今從袋中每取一球，取後即放回，連取三次，則取得的紅球數之期望值爲_______，若改爲從袋中一次任取二球，則取得的紅球數之期望值爲_______。

答案：$\dfrac{9}{10}$, $\dfrac{3}{5}$

解析：取 1 球之期望值爲$\dfrac{3}{10}$，$\dfrac{3}{10}\times 3=\dfrac{9}{10}$　　$\dfrac{C_2^3}{C_2^{10}}\times 2+\dfrac{C_1^3C_1^7}{C_2^{10}}\times 1=\dfrac{3}{5}$，即$\dfrac{3}{10}\times 2=\dfrac{3}{5}$

12、投擲三枚公正的硬幣，若出現三枚同一面時，可獲得 10 元，若出現二正面一反面時，可獲得 2 元，若出現二反面一正面時，要賠 6 元，則其報酬的期望值爲_______元。

答案：1

解析：$10\times\dfrac{1}{4}+2\times\dfrac{3}{8}+(-6)\times\dfrac{3}{8}=1$

三. 計算與證明題 (每題 0 分)

1、甲乙二人進行乒乓球比賽，已知二人技能相當，且比賽均不得有和局，約定先勝三場者可獲得獎金 640 元，今比賽了一場，甲得勝，但卻因故停止比賽，並決定不再比賽，則獎金依獲勝機率分配，甲應得多少元？乙應得多少元？

答案：

$$\text{甲}\begin{cases}\text{甲甲}\\ \underline{\text{乙甲}}\text{甲}\\ \underline{\text{乙乙甲}}\text{甲}\end{cases}\quad \text{甲勝之機率}\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{3!}{2!}\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{35}{64}$$

甲得$640\times\dfrac{35}{64}=350$元，乙得 290 元

2、根據過去資料顯示，一個 60 歲的人在一年內死亡的機率爲 0.08%，生病住院之機率爲 6%，佳怡 60 歲投保 100 萬元之人壽保險 1 年期，於保險期間若死亡，則保險公司給付 100 萬元，若生病住院，則給付 1 萬元，今保險公司欲得利潤之期望值爲 600 元，則應收保費多少元？

答案：

保險公司支出	100 萬元	1 萬元
機率	0.08%	6%

$$1000000\times 0.08\%+10000\times 6\%=800+600=1400,\ 1400+600=2000$$

3、一袋中有 1 號球 n 個，2 號球$(n-1)$個，3 號球$(n-2)$個，……，n 號球 1 個，今自袋中任取一球，若取得 r 號球，就可得 r 元，試求其數學期望值。

答案：共有$n+(n-1)+(n-2)+\cdots+1=\dfrac{(n+1)\times n}{2}$個

$$1\times\frac{n}{\frac{n(n+1)}{2}}+2\times\frac{(n-1)}{\frac{n(n+1)}{2}}+3\times\frac{(n-2)}{\frac{n(n+1)}{2}}+\cdots+n\times\frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}}$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}[1\times n+2\times(n-1)+3\times(n-2)+\cdots+n\times1]$$

$$=\frac{2}{n(n+1)}\times[\sum_{K=1}^{n}K(n+1-K)]=\frac{2}{n(n+1)}[(n+1)\times\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}]$$

$$=(n+1)-\frac{2n+1}{3}=\frac{n+2}{3}$$

4、一袋中有 1 號球 1 個，2 號球 2 個，3 號球 3 個，……，n 號球 n 個，今自袋中任取一球，若取得 r 號球，就可得 r^2 元，試求其數學期望值。

答案：球的總個數爲 $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

所求期望值爲

$$\sum_{r=1}^{n}r\cdot\frac{r}{\frac{1}{2}n(n+1)}=\frac{\sum_{r=1}^{n}r^3}{\frac{1}{2}n(n+1)}=\frac{[\frac{1}{2}n(n+1)]^2}{\frac{1}{2}n(n+1)}=\frac{1}{2}n(n+1)$$

11、一袋中有 1 號球 1 個，2 號球 2 個，3 號球 3 個，……，n 號球 n 個。今自袋中任取一球，若取得 r 號球，就可得 r 元，試求其數學期望值。

答案：球的總個數爲 $1+2+3+\cdots+=\frac{1}{2}n(n+1)$

所求期望值爲

$$\sum_{r=1}^{n}r\cdot\frac{r}{\frac{1}{2}n(n+1)}=\frac{\sum_{r=1}^{n}r^2}{\frac{1}{2}n(n+1)}=\frac{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)}{\frac{1}{2}n(n+1)}=\frac{2n+1}{3}$$