高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：92.04.30					
範圍	2-5 二項是定理+Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 填充題 (每題 10 分)

1、$(a-2b)^5$展開式中，b^5項的係數為_______，a^3b^2項的係數為_______。

答案：$(a-2b)^5=\sum_{r=0}^{5}C_r^5(a)^r(-2b)^{5-r}$ ，b^5項的係數為$C_0^5(-2)^5=-32$，

a^3b^2項的係數為$C_3^5(-2)^2=40$

2、試求在$(2x^3-\frac{3}{x})^{10}$的展開式中的

(1)第六項為___________。(2) $\frac{1}{x^{10}}$ 項的係數為___________。

答案：$(2x^3-\frac{3}{x})^{10}$

$=\sum_{r=10}^{10}C_r^{10}(2x^3)^{10-r}\cdot(-\frac{3}{x})^r$

$=\sum_{r=10}^{10}C_r^{10}\cdot(2)^{10-r}\cdot(-3)^r\cdot x^{30-3r-r}$

(1)第六項$C_5^{10}(2)^5(-3)^5x^{10}=-2^7\times3^7\times7\times x^{10}=-1959552x^{10}$

(2)$30-4r=-10\quad\therefore r=10$，$C_{10}^{10}(2)^0(-3)^{10}=3^{10}$

3、設$n\in\mathbf{N}$，$(ax+2)^{2n}$與$(2x+a)^{2n+1}$之展開式中x^n之係數相等，則x^n項之係數為________（以a與n表示之），又$a=$_____________（以n表示之）。

答案：$C_n^{2n}(ax)^n\cdot(2)^n=C_n^{2n+1}(2x)^n\cdot(a)^{n+1}=C_n^{2n}a^n\cdot2^n\cdot x^n$

$\therefore C_n^{2n}\cdot a^n\cdot2^n=C_n^{2n+1}\cdot2^n\cdot a^{n+1}\Rightarrow a=\frac{n+1}{2n+1}\ \therefore x^n$項係數為$C_n^{2n}\cdot a^n\cdot2^n$

4、設$(ax-1)^9$與$(x-\frac{2}{3})^8$之展開式中的x^3項係數相等，則a $=$_______，又$(ax-1)^9$展開式中x^3項係數為_______。

答案：$C_3^9(ax)^3=C_3^8x^3(-\frac{2}{3})^5\quad\therefore 9a^3=6\times(-\frac{2}{3})^5\quad\therefore a=-\frac{4}{9}$

x^3項係數為$C_3^8(-\frac{2}{3})^5=-\frac{1792}{243}$

5、試求$1+(x+1)+(x+1)^2+(x+1)^3+\cdots+(x+1)^{19}$之展開式中，$x^{18}$項的係數為_______，$x^5$項的係數為_______。

答案：$1+(x+1)+(x+1)^2+\cdots+(x+1)^{19}=\frac{(1+x)^{20}-1}{x}$

x^{18}項的係數為$C_{19}^{20}=20$，x^5項的係數為$C_6^{20}=38760$

6、求$(1+x+x^3)^{10}$的展開式中，x^4項的係數為__________，又x^{22}項係數為__________。

答案：$(1+x+x^3)^{10}=\sum\limits_{0\le\alpha,\beta\le10}\dfrac{10!}{\alpha!\beta!(10-\alpha-\beta)!}x^{\alpha}(x^3)^{\beta}$

$\alpha+3\beta=4$，

α	4	1	
β	0	1	

係數為$\dfrac{10!}{4!6!}+\dfrac{10!}{8!}=300$

$\alpha+3\beta=22$，

α	1	4	
β	7	6	

係數為$\dfrac{10!}{7!2!}+\dfrac{10!}{6!4!}=570$

7、(1)設$2000<C_0^n+2C_1^n+4C_2^n+\cdots+2^nC_n^n<2500$，則$n=$________。

(2)$C_3^5+C_4^6+C_5^7+\cdots+C_{16}^{18}=$________。

答案：(1)$C_0^n+2C_1^n+4C_2^n+\cdots+2^nC_n^n=(2+1)^n=3^n, 2000<3^n<2500$

$n=7$，$3^7=2187$

(2)$(C_0^2+C_1^3+C_2^4)+(C_3^5+C_4^6+\cdots+C_{16}^{18})=C_{16}^{19}=C_3^{19}=969$

$\therefore C_3^5+C_4^6+\cdots+C_{16}^{18}=969-10=959$

8、$(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)(x+9)$展開式中，$x^4$的係數為__________，$x^3$的係數為__________。

答案：x^4的係數為$1+3+5+7+9=25$

x^3的係數為$(1\times3+1\times5+1\times7+1\times9+3\times5+\cdots+7\times9)$

$=\dfrac{(1+3+5+7+9)^2-(1^2+3^2+5^2+7^2+9^2)}{2}=\dfrac{25^2-(1+9+25+49+81)}{2}=215$

9、$(x-\dfrac{4}{x^2})^6$展開式中，常數項為__________，又x^5項係數為__________。

答案：$C_r^6(x)^{6-r}\cdot(-\dfrac{4}{x^2})^r=C_r^6\cdot(-4)^r\cdot x^{6-3r}$，常數項時，$r=2$，$C_2^6(-4)^2=240$

x^5項係數　$\because 6-3r=5$，$r=\dfrac{1}{3}$（不合），故其係數為 0

10、試求(1)$502^3=$____________，(2)$0.98^5=$______________。（求到小數點後第三位；以下四捨五入）

答案：(1)$(500+2)^3$

$=(500)^3+3(500)^2\times2+3\times500\times2^2+2^3$

$=126506008$

(2)$(1-0.02)^5$

$=1-5$□ $0.02+10$□ $^{2}-$ ^{3} $^{4}-$ $2)^{5}$

$\doteq1-0.1+0.004-0.00008$

$\fallingdotseq0.904$

11、(1)$C_0^{10}C_4^5+C_1^{10}C_3^5+C_2^{10}C_2^5+C_3^{10}C_1^5+C_4^{10}C_0^5=$________。

(2) $C_1^{10}+2C_2^{10}+3C_3^{10}+\cdots+10C_{10}^{10}=$____________。

答案：(1)原式$=C_4^{15}=1365$

(2)$10+10\times C_1^9+10\times C_2^9+\cdots+10\times C_9^9=10\times 2^9=5120$

12、(1) $C_4^4+C_4^5+C_4^6+\cdots+C_4^{11}=$_____________。

(2) $C_6^{13}+C_5^{12}+C_4^{11}+C_3^{10}+C_2^9+C_1^8=$____________。

答案：(1) $C_4^4+C_4^5+C_4^6+\cdots+C_4^{11}=C_5^{12}=792$

(2) $C_6^{13}+C_5^{12}+C_4^{11}+C_3^{10}+C_2^9+C_1^8=C_6^{14}-C_0^7=3003-1=3002$

13、$(2a-3b)^6$ 展開式中，ab^5 項的係數爲_______，a^4b^2 項的係數爲_______。

答案：(1) $C_1^6(2a)^1(-3b)^5=-2916ab^5$ (2) $C_2^6(2a)^4(-3b)^2=2160a^4b^2$

14、(1) $(x+1)^2$ 除 $x^9-10x+1$ 之餘式爲_______。

(2) $(x+1)^3$ 除 $x^9-10x+1$ 之餘式爲_______。

答案：令 $y=x+1$ $\therefore x=y-1\therefore x^9-10x+1=(y-1)^9-10(y-1)+1$

$=y^3\cdot Q(y)+C_2^9(-1)^7y^2+C_1^9(-1)^8y+C_0^9(-1)^9y^0-10y+10+1$

$=y^3\cdot Q(y)-36y^2+9y-1-10y+11 = y^3Q(y)-36y^2-y+10$

$\therefore(x^9-10x+1)$除以$(x+1)^2$之餘式爲$-(x+1)+10=-x+9$

$(x^9-10x+1)$除以$(x+1)^3$之餘式爲

$-36(x+1)^2-(x+1)+10=-36x^2-73x-27$

15、11^{15} 除以 100 的餘數爲______。

答案：51

解析：$11^{15}=(10+1)^{15}=10^{15}+C_1^{15}\cdot 10^{14}+\cdots+C_{13}^{15}\cdot 10^2+C_{14}^{15}\cdot 10+1$

$=10^2\times\left(10^{14}+C_1^{15}\cdot 10^{13}+\cdots+C_{13}^{15}\right)+C_{14}^{15}\cdot 10+1$

$=100\times\left(10^{14}+\cdots+C_{13}^{15}\right)+151$

$=100\times\left(10^{14}+\cdots+C_{13}^{15}+1\right)+51$ $\therefore$餘數 51

16、(1) $C_0^n+C_1^n+C_2^n+\cdots+C_n^n=$__________$,n\in\mathbf{N}$。

(2) $C_0^n-C_1^n+C_2^n-C_3^n+\cdots+(-1)^nC_n^n=$_______$,n\in\mathbf{N}$。

三. 計算與證明題 (每題 10 分)

1、試利用二項式定理求下列二數之值：

(1) 1.03^4 (2) 49.5^4

答案：(1) $1.03^4=(1+0.03)^4$

$=1+4\times 0.03+6(0.03)^2+4(0.03)^3+(0.03)^4$

$=1+0.12+0.0054+0.000108+0.00000081=1.12550881$

(2) $49.5^4=(50-0.5)^4$

$=50^4-4\times 50^3\times 0.5+6\times 50^2\times 0.5^2-4\times 50\times 0.5^3+0.5^4$

$=6250000-250000+3750-25+0.0625=6003725.0625$

2、試求$(2a-3b)^5$的展開式。

答案：$(2a-3b)^5=C_0^5(2a)^5+C_1^5(2a)^4(-3b)+C_2^5(2a)^3(-3b)^2$

$+C_3^5(2a)^2(-3b)^3+C_4^5(2a)(-3b)^4+C_5^5(-3b)^5$

$=32a^5-240a^4b+720a^3b^2-1080a^2b^3+810ab^4-243b^5$