高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：92.03.10					
範圍	1-4 曲線與直線+Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 單一選擇題 (每題 5 分)

1、(C) 設拋物線 $y=4x^2$ 與直線 $y=2x+k$ 相切，則 $k=$

(A)–4 (B)–1 (C)$-\frac{1}{4}$ (D)$\frac{1}{32}$ (E)$\frac{1}{2}$

解析：$2x+k=4x^2$ ，$D=0$ $\therefore$ $4+16k=0, k=-\frac{1}{4}$

2、(D) 橢圓 $2x^2+y^2=9$ 在(2 , 1)處的切線方程式為 (A)$2x+y=5$ (B)$2x+y=18$ (C)$x+y=3$ (D)$4x+y=9$ (E)以上皆非

解析：切點為(2,1)，切線為 $2x\cdot 2+y\cdot 1=9 \Rightarrow 4x+y=9$

3、(A) 設拋物線 $y=ax^2+bx+c$ 通過點(1,1)且與直線 $x+y+1=0$ 相切於(0 , –1)，則 $a=$

(A)3 (B)2 (C)1 (D)–1 (E)–2

解析：(A)$\frac{y-1}{2}=ax\cdot 0+\frac{b}{2}(x+0)+c \Rightarrow bx-y+2c+1=0$ 與 $x+y+1=0$ 重合

$\therefore b=-1$，$c=-1$ 又 $a+b+c=1$ $\therefore$ $a=3$

4、(D) 設雙曲線 $4x^2-y^2=4$ 與直線 $y=x+1$ 相交於 A、B 兩點，則 $\overline{AB}$ 線段長為 (A)$\frac{5}{3}$

(B)1 (C)$\frac{8}{3}$ (D)$\frac{8\sqrt{2}}{3}$ (E)$\frac{16\sqrt{2}}{3}$

解析：$\begin{cases}4x^2-y^2=4\\ y=x+1\end{cases} \Rightarrow 3x^2-2x-5=0, x=\frac{5}{3}$ 或 -1

$\overline{AB}=\sqrt{2}(\frac{5}{3}+1)=\frac{8}{3}\sqrt{2}$

5、(C) 兩端點在一橢圓上的線段稱為該橢圓的弦，在橢圓 $25x^2+4y^2=100$ 的諸弦中，以點(1,–4)為中點的弦方程式為 (A)$3x-2y-11=0$ (B)$5x-4y-21=0$

(C)$8x-5y-28=0$ (D)$25x-4y-41=0$ (E)$25x-16y-89=0$

解析：設過(1,–4)之弦與橢圓相交於 P、Q 兩點，設 $P(x,y)$，$Q(2-x, -8-y)$

$\therefore$ $25x^2+4y^2=100\cdots\cdots$①

$25(2-x)^2+4(-8-y)^2=100\cdots\cdots$② ②-① 可得

$25(4-4x)+4(64+16y)=0$，$25x-16y-89=0$

6、(D) 已知兩拋物線 $x=y^2-2y+4$ 與 $y=x^2-kx+10$ 有交點，其中有兩個交點在直線 $x=y+2$ 上，則 k 的值為 (A)3 (B)4 (C)5 (D)6 (E)7

解析：$\begin{cases}x=y^2-2y+4\\ x=y+2\end{cases} \Rightarrow y=1$ 或 2 $\therefore$ 交點為 (3,1)與(4,2)

點(3 , 1) 代入 $y=x^2-kx+10, k=6$

二. 填充題（每題 10 分）

1、自 P 點向雙曲線 $x^2-4y^2=4$ 作兩條切線分別切雙曲線於 A、B 兩點，若 AB 直線方程

式爲 $x+8y=4$，則 P 點坐標爲______。

答案：$(1,-2)$

解析：設 $P(x_0, y_0)$ $\Rightarrow$ AB 直線方程式爲 $xx_0-4yy_0=4$，即 $x+8y=4$

$\therefore x_0=1$，$y_0=-2$ $\therefore$ $P(1,-2)$

2、設橢圓兩焦點分別爲(4,0)，(–4,0)又其上有一切線方程式爲 $4x+3y=41$，則此橢圓之長軸長爲_______，又其橢圓方程式爲_______。

答案：$2\sqrt{73}$, $\dfrac{x^2}{73}+\dfrac{y^2}{57}=1$

解析：F (4,0)對 $4x+3y=41$ 之對稱點 H 爲 $(4,0)-2\dfrac{(-25)}{5}(\dfrac{4}{5},\dfrac{3}{5})=(12,6)$

$\therefore$長軸長爲 $\sqrt{16^2+6^2}=2\sqrt{73}$ $\therefore$橢圓方程式爲 $\dfrac{x^2}{73}+\dfrac{y^2}{57}=1$

3、設拋物線 $\Gamma: y^2=4x$ 與一直線 $L: x-2y-1=0$ 相交於 A，B 二點，則 $\overline{AB}$ 之長爲______。

答案：20

解析：$\begin{cases} y^2=4x \\ x-2y-1=0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $y^2-8y-4=0$ $\Rightarrow$ $(y_1-y_2)^2=8^2-4\times(-4)=80$

又直線斜率 $\dfrac{1}{2}$ $\therefore$ $\overline{AB}=\sqrt{5}\times\sqrt{80}=20$

4、點 $P(3,a)$ 爲拋物線 $x^2+4y=0$ 外一點，自點 P 作拋物線的兩條切線，此二條切線會互相垂直，則 $a=$ _______。

答案：1

解析：$x^2=-4y$ 之切線爲 $y=mx+m^2$ 代入 $(3,a) \Rightarrow m^2+3m-a=0$ $\because$過 P 點兩切線垂直 $\therefore$

$m_1m_2=-1$ $\therefore \dfrac{-a}{1}=-1$ $\therefore a=1$

5、過雙曲線 $4x^2-y^2-8x-2y-9=0$ 上一點(3,1)的切線方程式爲______。

答案：$4x-y-11=0$

解析：切線爲 $4\cdot3\cdot x-1\cdot y-4(x+3)-(y+1)-9=0$ $\Rightarrow$ $4x-y-11=0$

6、橢圓 $\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ 在 $x+y+4=0$ 之直線上的正射影長爲_______。

答案：$\sqrt{13}$

解析：$\dfrac{(x-1)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ 之斜率爲 1 之切線爲 $y-1=(x-1)\pm\sqrt{9+4}$，即 $x-y\pm\sqrt{13}=0$

相距 $\dfrac{\sqrt{26}}{\sqrt{2}}=\sqrt{13}$，即爲橢圓在 $x+y+4=0$ 上之正射影長

7、拋物線 $x^2=4y$ 上有一弦，其中點爲(1,2)，則此弦之方程式爲______，又其弦長爲______。

答案：$x-2y+3=0$, $\sqrt{70}$

解析：$x^2=4y$ 上有一弦，$\overline{PQ}$ 之中點爲(1,2)，設 $P(x,y)$，$Q(2-x,4-y)$

$\Rightarrow$ $x^2=4y$ ……①，$(2-x)^2=4(4-y)$ ……②

①-② 得 $4x-4=8y-16$ $\Rightarrow$ $x-2y+3=0$

$\begin{cases} y^2 = 4y \\ x-2y+3=0 \end{cases} \Rightarrow x^2-2x-6=0$，$|(x_1-x_2)|^2 = 4-4\times(-6)=28$

$\therefore$ 直線斜率$\dfrac{1}{2}$　　$\therefore$ 弦長$=\sqrt{28}\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\sqrt{70}$

8、自點$P(0,2)$向雙曲線$x^2-y^2=1$作兩條切線分別切雙曲線於A，B兩點，則AB直線方程式爲______。

答案：$y=\dfrac{-1}{2}$

解析：AB直線方程式爲$x\cdot(0)-y\cdot(2)=1$　$\therefore y=\dfrac{-1}{2}$

9、設一直線 L 切拋物線$\Gamma: x^2=4y$於一點$P(3,t)$，則$t=$______ 又L之方程式爲______。

答案：$\dfrac{9}{4}, 6x-4y=9$

解析：$9=4t$　，$t=\dfrac{9}{4}$　切線爲$3x=4(\dfrac{y+t}{2})$，$3x=2y+\dfrac{9}{2}$

$\therefore$ L 爲 $6x-4y=9$

10、自橢圓外一點$P(3,-3)$作橢圓$\dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{25}=1$之兩切線與橢圓相切於二點$A$、$B$，若$A$爲橢圓之頂點，則$A$點坐標爲______又$AB$直線方程式爲______。

答案：$(-1,-3)$, $5x-y+2=0$

解析：設橢圓外一點$P(3,-3)$作橢圓之兩切線，切點AB之直線方程式爲

$\dfrac{(x+1)(3+1)}{4}+\dfrac{(y-2)(-3-2)}{25}=1 \Rightarrow 5x-y+2=0$

$\begin{cases} \dfrac{(x+1)^2}{4}+\dfrac{(y-2)^2}{25}=1 \\ 5x-y+2=0 \end{cases} \Rightarrow 5x^2+2x-3=0$，$x=\dfrac{3}{5}$或$-1$

$\therefore$ $A(-1,-3)$

11、斜率爲 3 而與雙曲線$\dfrac{(x-2)^2}{25}-\dfrac{(y+1)^2}{100}=1$相切的直線之方程式爲______和______。

答案：$y=3x-7+5\sqrt{5}$，$y=3x-7-5\sqrt{5}$

解析：設切線爲$(y+1)=m(x-2)\pm\sqrt{25m^2-100}$，$m=3$代入

$\therefore y=3x-7+5\sqrt{5}$和$y=3x-7-5\sqrt{5}$

12、與雙曲線$\Gamma:\dfrac{(y-5)^2}{63}-\dfrac{(x-2)^2}{28}=1$相交於一點$P(8,-7)$的直線之方程式爲______。

答案：$9x+8y=16$

解析：切線爲$\dfrac{(y-5)(-7-5)}{63}-\dfrac{(x-2)(8-2)}{28}=1 \Rightarrow 9x+8y=16$

13、設橢圓$2x^2+y^2+4x=6$與直線$x-2y+k=0$相切，則$k=$______或______。

答案：7, –5

解析：橢圓$2(x+1)^2+y^2=8$，切線爲$y=m(x+1)\pm\sqrt{4m^2+8}$

令$m=\dfrac{1}{2}$，得$y=\dfrac{1}{2}(x+1)\pm\sqrt{9} \Rightarrow x-2y+7=0$或$x-2y-5=0$

$\therefore\ k=7$ 或-5

14、過點(3,4)與橢圓$4x^2+9y^2=36$相切的直線方程式為______和______。

答案：$y-4=\dfrac{1}{2}(x-3)$, $x=3$

解析：橢圓切線為$y=mx\pm\sqrt{qm^2+4}$，代入(3,4) 得

$4=3m\pm\sqrt{9m^2+4}$，$m=\dfrac{1}{2}$　$\therefore$ 切線為$y-4=\dfrac{1}{2}(x-3)$和$x=3$

15、若直線$x+y=2$與橢圓$4x^2+9y^2=36$相交於P、Q二點，則$\overline{PQ}$之中點坐標為_______。

答案：$(\dfrac{18}{13},\dfrac{8}{13})$

解析：$\begin{cases} x+y=2 \\ 4x^2+9y^2=36 \end{cases} \Rightarrow\ 13x^2-36x=0\ \Rightarrow\ x=0$ 或 $x=\dfrac{36}{13}$

$\therefore\ \overline{PQ}$中點坐標為$(\dfrac{18}{13},\dfrac{8}{13})$

16、若雙曲線$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=1$上有一弦，其中點坐標為(4,1)，則此弦之方程式為______，又其弦長為______。

答案：$x-y=3,\ \dfrac{8}{3}\sqrt{3}$

解析：雙曲線上有一弦$\overline{PQ}$，其中點坐標為(4,1)，設$P(x,y)$，$Q(8-x,2-y)$

$\therefore\ \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=1\cdots\cdots$①　$\dfrac{(8-x)^2}{4}-\dfrac{(2-y)^2}{1}=1\cdots\cdots$②

①-② 得 $16x-64-16y+16=0\ \Rightarrow\ x-y=3$

$\begin{cases} \dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{1}=1 \\ x-y=3 \end{cases} \Rightarrow\ -3y^2+6y+5=0$　其二根為y_1，$y_2\Rightarrow$

$(y_1-y_2)^2=2^2-4\times(-\dfrac{5}{3})=\dfrac{32}{3}$　$\therefore\ |y_1-y_2|=\sqrt{\dfrac{32}{3}}$　$\therefore$ 弦長為$\sqrt{\dfrac{32}{3}}\times\sqrt{2}=\dfrac{8}{3}\sqrt{3}$

17、過$P(4,1)$，且與橢圓$\dfrac{(x-1)^2}{15}+\dfrac{(y+1)^2}{10}=1$相切的直線方程式為______。

答案：$x+y=5$

18、試求與直線$3x+2y=1$垂直又與拋物線$\Gamma: y^2-3x+2y+1=0$相切的直線之方程式為______。

答案：$16x-24y+3=0$

解析：拋物線$(y+1)^2=3x$之切線斜率為$\dfrac{2}{3}$，其切線方程式為$(y+1)=\dfrac{2}{3}(x)+\dfrac{\frac{3}{4}}{\frac{2}{3}}$，即 $16x-24y+3=0$

19、一道光線經過一點$A(12,6)$沿著水平方向前進，遇到拋物線Γ：$y^2=4x$上一點P，經反射後通過一點B，且向前遇到拋物線上一點Q，已知$\overline{PB}=5$，則B點坐標為_______，又Q點坐標為_______。

答案：$(5,3), (\frac{1}{9},-\frac{2}{3})$

解析：$\begin{cases} y^2 = 4x \\ y = 6 \end{cases}$ $\therefore x = 9$ $\therefore P(9,6)$，設焦點 $F(1,0)$，故反射後沿 $\overrightarrow{PF}$ 前進，B 在 $\overline{PF}$

上且 $\overline{PB} = 5$，$\overrightarrow{PF} = (-8,-6)$ $\therefore \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP} + 5 \times (\frac{-8}{10},\frac{-6}{10}) = (5,3)$

設 $Q(t^2,2t)$ $\overrightarrow{PF} // \overrightarrow{FQ}$ $\therefore 3t^2 - 8t - 3 = 0$，$t = 3$ 或 $-\frac{1}{3}$ $\therefore Q(\frac{1}{9},-\frac{2}{3})$

20、設一直線 L 與橢圓 $3x^2 + y^2 + 12x - 2y + 1 = 0$ 相切於一點 $P(-1,4)$，則 L 之方程式為______。

答案：$x + y = 3$

解析：橢圓 $3(x+2)^2 + (y-1)^2 = 12$ 之切點為 $(-1,4)$，

則 L 為 $3(x+2)(-1+2) + (y-1)(4-1) = 12 \Rightarrow x + y = 3$

21、若 $x^2 - 3y^2 + 12y - 25 = 0$ 的一切線為 $4x - 3y - 7 = 0$，則其切點坐標為______。

答案：$(4, 3)$

解析：$\begin{cases} x^2 - 3y^2 + 12y - 25 = 0 \\ 4x - 3y - 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 8x + 16 = 0$ $\therefore x = 4$，切點為 $(4, 3)$

22、設 F，F' 分別為橢圓 $9x^2 + 4y^2 = 36$ 的兩焦點，P 為橢圓上任一點，且 $\angle FPF'$ 的平分線斜率為 $\frac{1}{2}$，則過 P 點的切線方程式為_______或_______。

答案：$y = -2x + 5$，$y = -2x - 5$

解析：$\because \angle FPF'$ 之平分線斜率為 $\frac{1}{2}$ $\therefore$ 過 P 之切線斜率為 -2 $\therefore$ 切線為 $y = -2x \pm \sqrt{4 \times 4 + 9}$

$\therefore y = -2x \pm 5$

23、過拋物線 $y = x^2 + 2x$ 外一點 $P(1,2)$ 所作的切線之方程式為______和______。

答案：$y = 2x, y = 6x - 4$

解析：$\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ y = m(x-1) + 2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + (2-m)x + (m-2) = 0$ 有重根

$\Rightarrow D = 0,\ (2-m)^2 - 4(m-2) = 0$ $\therefore m = 2$ 或 $m = 6$

$\therefore$ 切線為 $y = 2x$ 或 $y = 6x - 4$

三. 計算與證明題（每題 0 分）

1、一道光線經過一點 $A(-2, 6)$ 沿著水平方向前進，遇到拋物線 $\Gamma: y^2 = 4x$ 上一點 P，經反射後通過一點 B，而 $\overline{PB} = 10$，求 B 之坐標。

答案：將 $y = 6$ 代入 $\Gamma: y^2 = 4x$ 中，得 $36 = 4x, x = 9$，故入射點為 $P(9, 6)$

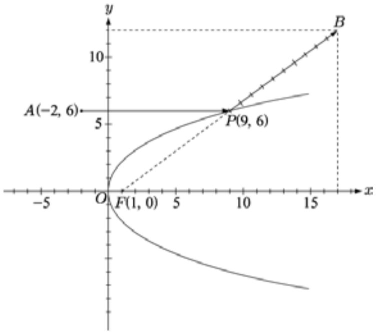
而焦點為 $F(1, 0)$

則 $\overrightarrow{PF} = (1-9, 0-6) = (-8, -6) = -(8, 6)$

$-\overrightarrow{PF} = (8, 6)$ 且 $\left|-\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$

故反射向量 $\overrightarrow{PB}=-\overrightarrow{PF}=(8, 6)$

於是 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PB}=$ (9, 6) + (8, 6) = (17, 12)



2、設拋物線$\Gamma: y^2=4x$ 與一直線 $L{:}2x-y-1=0$ 相交於 A, B 二點，試求 $\overline{AB}$ 之長。

答案：拋物線 $\Gamma: y^2-4x=0$ ①

直線 $L{:}2x-y-1=0$ ②

L 之斜率為 $m=2,\ \dfrac{1}{m}=\dfrac{1}{2}$

① + ②×2 $y^2-2y-2=0$

得 $\overline{AB}=\sqrt{[2^2-4(-2)][1+(\frac{1}{2})^2]}=\sqrt{15}$

3、設一直線 L 交拋物線$\Gamma{:}x^2=6y$ 於 A, B 二點，而 $\overline{AB}$ 之中點為 $M(3, 5)$。試求 $\overline{AB}$ 之長及 L 之方程式。

答案：因 $\overline{AB}$ 之中點為 $M(3, 5)$，故可設 A, B 之坐標為

$A(3+a, 5+b), B(3-a, 5-b)$

而有 $\overline{AB}=2\,\overline{AM}=2\sqrt{a^2+b^2}$

L 之斜率$=\overline{AM}$ 之斜率$=\dfrac{b}{a}$

因 A, B 都在拋物線$\Gamma: x^2=6y$ 上，所以

$(3+a)^2=6(5+b)$ ①

$(3-a)^2=6(5-b)$ ②

① – ②，得 $12a=12b$

而有 $a=b$ ③

則 L 之斜率$=\dfrac{b}{a}=1$

因 L 之斜率為 1，且過 $M(3, 5)$，故 L 之方程式為

$x-y+2=0$

代③入①，得 $a^2=21$,

$b^2=a^2=21$

故 A, B 之距離$=2\overline{AM}=2\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{42}$ 。

4、試求斜率為 3 而與橢圓$\dfrac{(x-1)^2}{3}+\dfrac{y^2}{9}=1$相切的直線之方程式。

答案：所求切線之方程式為 $3(x-1)-y\ \pm\sqrt{3^2\cdot3+1^2\cdot9}=0$

即 $L_1: 3x-y+3=0$

$L_2: 3x-y-9=0$

5、設一直線 L 交拋物線 $\Gamma: y=x(x-3)$ 於 A, B 二點，而 $\overline{AB}$ 之中點爲 $M(1, 2)$。試求 $\overline{AB}$ 之長及 L 之方程式。

答案：設 L 交 Γ 於 $A(1+a, 2+b), B(1-a, 2-b)$

A, B 皆在 Γ 上 $\begin{cases} 2+b=(1+a)(-2+a), & ① \\ 2-b=(1-a)(-2-a) & ② \end{cases}$

① − ② $2b=-2a$

$b=-a$ ③

L 之斜率爲 $\dfrac{b}{a}=-1$

代③入① $2-a=a^2-a-2$

$a^2=4$

則 $\overline{AB}=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}=2\sqrt{2}$

L 之方程式爲 $x+y-3=0$

註：此二交點爲 $A(3, 0), B(-1, 4)$。

6、試求與直線 $3x+2y-1=0$ 平行，而與拋物線 $(y-2)^2=12(x+1)$ 相切的直線之方程式。

答案：已知直線 $3x+2y-1=0$

其斜率爲 $m=-\dfrac{3}{2}$

拋物線 Γ $(y-2)^2=4\cdot 3(x+1)$

$c=3,\ \dfrac{c}{m}=-2$

切線爲 $y-2=-\dfrac{3}{2}(x+1)-2$

乘以 2 $2y-4=-3x-3-4$

移項 $3x+2y+3=0$

7、試求與雙曲線 $\Gamma: \dfrac{(y-5)^2}{63}-\dfrac{(x-2)^2}{28}=1$ 相切於一點 $P(8, -7)$的直線之方程式。

答案：所求切線之方程式爲 $\dfrac{(-7-5)(y-5)}{63}-\dfrac{(8-2)(x-2)}{28}=1$

即 $\dfrac{-4(y-5)}{21}-\dfrac{3(x-2)}{14}=1$

同乘以 −42 $8(y-5)+9(x-2)=-42$

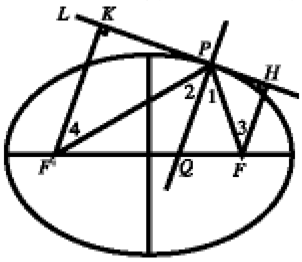
即 $9x+8y-16=0$

8、設 P 爲橢圓 Γ：$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上之任一點，$a>b>0$。F，F' 爲 Γ 之二焦點，$\angle FPF'=60^\circ$，過 P 作 Γ 之切線 L，自 F 作 $\overline{FH}\perp L$ 於 H，自 F' 作 $\overline{F'K}\perp L$ 於 K，求

(1) $\overline{FH}+\overline{HK}+\overline{KF'}$ 之長度和。(2)梯形 $FHKF'$ 之面積。

答案：(1) $a(1+\sqrt{3})$，(2) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a^2$

解析：(1)如下圖，過 P 作 L 之垂線$\overline{PQ}$，則$\overline{FH} // \overline{PQ} // \overline{F'K}$。



依橢圓的光學性質，$\angle 1 = \angle 2 = \dfrac{\theta}{2}$

而$\angle 3 = \angle 1,\ \angle 4 = \angle 2$，所以$\angle 3 = \angle 4 = \dfrac{\theta}{2}$

故$\overline{PH} + \overline{HK} + \overline{KF'}$

$= \overline{FH} + \overline{HP} + \overline{PK} + \overline{KF'}$

$= \overline{PF}\cos\dfrac{\theta}{2} + \overline{PF}\sin\dfrac{\theta}{2} + \overline{PF'}\sin\dfrac{\theta}{2} + \overline{PF'}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$= (\overline{PH} + \overline{PF'})(\sin\dfrac{\theta}{2} + \cos\dfrac{\theta}{2}) = 2a(\sin\dfrac{\theta}{2} + \cos\dfrac{\theta}{2})$ ($\theta = 60°$ 代入)

(2)$\overline{FH} + \overline{KF'} = \overline{PF}\cos\dfrac{\theta}{2} + \overline{PF'}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$= (\overline{PF} + \overline{PF'})\cos\dfrac{\theta}{2}$

$= 2a\cos\dfrac{\theta}{2}$

$\overline{HK} = \overline{HP} + \overline{PK}$

$= \overline{PF}\sin\dfrac{\theta}{2} + \overline{PF'}\sin\dfrac{\theta}{2}$

$= (\overline{PF} + \overline{PF'})\sin\dfrac{\theta}{2}$

$= 2a\sin\dfrac{\theta}{2}$

梯形$FHKF'$之面積$= \dfrac{1}{2}(\overline{FH} + \overline{KF'}) \cdot \overline{HK}$

$= \dfrac{1}{2} \cdot 2a\cos\dfrac{\theta}{2} \cdot 2a\sin\dfrac{\theta}{2}$

$= a^2\sin\theta$

($\theta = 60°$ 代入)

9、試求過拋物線 $y = x^2 + 3x + 2$ 外一點 $P(1, 5)$所作的切線之方程式。

答案：設切點為　$Q(x_0, x_0^2 + 3x_0 + 2)$

則切線為　$\dfrac{y + (x_0^2 + 3x_0 + 2)}{2} = x_0 x + 3 \cdot \dfrac{x + x_0}{2} + 2$

即　$y = (2x_0 + 3)x - x_0^2 + 2$

$P(1, 5)$在切線上　$5 = (2x_0 + 3) - x_0^2 + 2$

移項　$x_0^2 - 2x_0 = 0$

$x_0(x_0-2)=0$

$x_0=0$ 或 $x_0=2$

切線之斜率爲　3 或 7

切線爲　$L_1:3x-y+2=0$

$L_2:7x-y-2=0$

10、試就 m 值討論直線 $y=mx-2$ 與橢圓 $x^2+4y^2=4$ 之相交情形。

答案：$\begin{cases} y=mx-2 \\ x^2+4y^2=4 \end{cases}$　$(1+4m^2)x^2-16mx+12=0$

若直線與橢圓交於相異兩點時，$D>0 \Rightarrow m^2>\frac{3}{4}$　$\therefore m>\frac{\sqrt{3}}{2}$ 或 $m<-\frac{\sqrt{3}}{2}$

直線與橢圓相切時，$D=0 \Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

直線與橢圓不相交時，$D<0 \Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}<m<\frac{\sqrt{3}}{2}$

12、試求與直線 $3x+2y=1$ 垂直又與拋物線 $\Gamma: y^2-3x+2y+1=0$ 相切的直線之方程式。

答案：由已知　$\Gamma:(y+1)^2=4\cdot\frac{3}{4}x,\ \ c=\frac{3}{4}$

L 之斜率爲　$-\frac{3}{2}$

切線之斜率爲　$m=\frac{2}{3},\ \frac{c}{m}=\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{4}=\frac{9}{8}$

切線　$y+1=\frac{2}{3}x+\frac{9}{8}$

即　$16x-24y+3=0$

13、試就實數 m 值，討論直線 $L: y=m(x+1)$ 與拋物線 $\Gamma: y=x^2$ 相交的情形。

答案：$y=m(x+1)$ 代入 $y=x^2$ 中，可得 $x^2-mx-m=0$，

其判別式 $D=m^2+4m$

(i)若 $0<m<-4$，則 $D<0$，此時 L 與 Γ 沒有交點。

(ii)若 $m=0$ 或 $m=-4$，則 $D=0$，此時 L 與 Γ 恰有一交點。(相切)

(iii)若 $m>0$ 或 $m<-4$，則 $D>0$，此時 L 與 Γ 有兩交點。