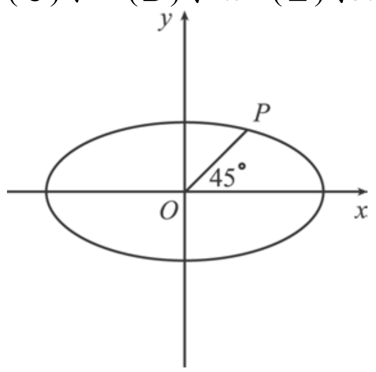
高雄市明誠中學 高二數學平時測驗 日期：92.02.26					
範圍	1-2 橢圓+Ans	班級		姓名	
		座號			

一. 單一選擇題 (每題 5 分)

1、(D) 若已知方程式 $x^2+4y^2+2x+4y+k=0$ 的圖形為橢圓，則 k 的範圍為何？ (A)任何實數皆可 (B) $k<0$ (C) $k\neq 0$ (D) $k<2$ (E) $k>2$

解析：$(x+1)^2+(2y+1)^2=-k+2$，$-k+2>0$ $\therefore$ $k<2$

2、(B) 在坐標平面上有一橢圓，它的長軸落在 x 軸上，短軸落在 y 軸上，長軸、短軸的長度分別為 4、2。如圖所示，通過橢圓的中心 O 且與 x 軸夾角為 45 度的直線在第一象限跟橢圓相交於 P。則此交點 P 與中心 O 的距離為 (A)1.5 (B) $\sqrt{1.6}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) $\sqrt{2.5}$ (E) $\sqrt{3.2}$



解析：橢圓方程式：$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1\cdots$①

直線 OP 方程式 $y=x$ 代入①$\Rightarrow \dfrac{x^2}{4}+x^2=1\Rightarrow x^2=\dfrac{4}{5}$

令 $P(x,y)\Rightarrow \overline{OP}=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2x^2}=\sqrt{2\cdot\dfrac{4}{5}}=\sqrt{1.6}$

3、(C) 設 $A(-2,-3)$，$B(4,5)$，P 點滿足 $\overline{PA}+\overline{PB}=10$，則 P 點所形成之軌跡圖形為 (A)拋物線 (B)橢圓 (C)線段 (D)射線 (E)無圖形

解析：$\overline{AB}=\sqrt{36+64}=10=\overline{PA}+\overline{PB}$ $\therefore$ P 在 $\overline{AB}$ 線段上

4、(D) 設有一橢圓，長軸在直線 $x=5$ 上，短軸在 $y=1$ 上，已知短軸為長軸之 3/5 倍，且中心到焦點的距離等於 12，則橢圓方程式為 (A) $\dfrac{(x-1)^2}{81}+\dfrac{(y-5)^2}{225}=1$ (B) $\dfrac{(x-5)^2}{9}+\dfrac{(y-1)^2}{25}=1$ (C) $\dfrac{(x-5)^2}{45}+\dfrac{(y-1)^2}{125}=1$ (D) $\dfrac{(x-5)^2}{81}+\dfrac{(y-1)^2}{225}=1$ (E) $\dfrac{(x-5)^2}{225}+\dfrac{(y-1)^2}{81}=1$

解析：中心$(5,1)$，$c=12$，又 $b=\dfrac{3}{5}a$，$a^2=b^2+c^2$ $\therefore$ $a=15$，$b=9$

$\therefore$ 橢圓為 $\dfrac{(x-5)^2}{81}+\dfrac{(y-1)^2}{225}=1$

5、(B) 設橢圓中心為$(2,5)$，半長軸為 9，半短軸為 4，長軸平行於 y 軸，則此橢圓方程

式為 (A) $\frac{(x-2)^2}{81}+\frac{(y-5)^2}{16}=1$ (B) $\frac{(x-2)^2}{16}+\frac{(y-5)^2}{81}=1$

(C) $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{(y-5)^2}{4}=1$ (D) $\frac{(x-2)^2}{4}+\frac{(y-5)^2}{9}=1$ (E) $\frac{(x-2)^2}{2}+\frac{(y-5)^2}{3}=1$

6、(A) 坐標平面上有一橢圓，已知其長軸平行 x 軸，短軸的一個頂點為$(-2 , 1)$且其中一焦點為$(1 , -3)$，則橢圓之長軸長為 (A)10 (B)8 (C) $2\sqrt{13}$ (D)6 (E)5

解析：∵長軸平行 x 軸又焦點為$(1 , -3)$ ∴長軸為 $y=-3$

短軸頂點為$(-2 , 1)$，故短軸為 $x=-2$ ，中心為$(-2 , -3)$

$b=4, c=3$ ∴ $a=5$ ∴長軸長為 10

二. 多重選擇題 (每題 10 分)

1、(BC DE) 方程式 $\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-6)^2+(y-8)^2}=20$ 之圖形為一橢圓，下列何者正確？ (A)長軸長為 40 (B)中心在(3, 4) (C)短軸長為 $10\sqrt{3}$ (D)正焦弦長為 15 (E)短軸在直線 $3x+4y-25=0$ 上

三. 填充題 (每題 10 分)

1、設一橢圓之二焦點為 $F(1,3)$，$F'(1,-3)$，長軸之長為 10，則此橢圓之方程式為______。

答案：$\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

解析：中心為(1,0)，$c=3$，$a=5$，$b=4$ 的直橢圓為 $\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$

2、設方程式 $\frac{y^2}{3-t}+\frac{x^2}{1+t}=1$ 為焦點在 y 軸上之橢圓方程式，則實數 t 的範圍為______。

答案：$1<t<3$

解析：焦點在 y 軸上之橢圓 $1+t>3-t>0 \Rightarrow 1<t<3$

3、設 F_1, F_2 為橢圓 $\Gamma:\frac{(x-1)^2}{16}+\frac{(y+3)^2}{25}=1$ 的焦點，且 $\overline{AB}$ 為過 F_1 的焦弦，求△ABF_2 的周長=______。

答案：20

4、中心為(1,2)，短軸有一端點為(−5,2)，正焦弦為 7.2 的橢圓之方程式為______。

答案：$\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{100}=1$

解析：中心(1,2)，$b=6$，$\frac{2b^2}{a}=7.2$ ∴ $a=10$，直橢圓為 $\frac{(x-1)^2}{36}+\frac{(y-2)^2}{100}=1$

5、中心為(1, 2)，長軸平行 x 軸，長軸長為短軸長的 3 倍，且過點(4, 3)之橢圓方程式為______。

答案：$\frac{(x-1)^2}{18}+\frac{(y-2)^2}{2}=1$

6、已知一橢圓的長軸兩端點為 $A(7,-2)$，$A'(-3,-2)$，兩焦點之間的距離為 4，則此橢圓之方程式為______，又其正焦弦長為______。

答案：$\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{21}=1$, $\dfrac{42}{5}$

解析：中心為(2 , −2)的橫橢圓，$a=5$，$2c=4$，$c=2$，$b=\sqrt{21}$

$\therefore$ 橢圓方程式為$\dfrac{(x-2)^2}{25}+\dfrac{(y+2)^2}{21}=1$，正焦弦長$\dfrac{42}{5}$

7、設 $A(1,1)$，$B(1,-3)$，P 點滿足$\overline{PA}+\overline{PB}=6$，則 P 點之軌跡方程式為______。

答案：$\dfrac{(x-1)^2}{5}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$

解析：$\overline{AB}=4<\overline{PA}+\overline{PB}=6$ $\therefore$為橢圓中心$(1,-1)$，$c=2$，$a=3$，$b=\sqrt{5}$，直橢圓方程式

$\dfrac{(x-1)^2}{5}+\dfrac{(y+1)^2}{9}=1$

8、設圓 C 與二定圓$C_1: x^2+y^2=36$，$C_2: x^2+(y-2)^2=49$ 相切，

(1)當圓 C 與圓C_1外切時，圓 C 之圓心軌跡方程式為____________，

(2)當圓 C 與圓C_1內切時，圓 C 之圓心軌跡方程式為____________。

答案：$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$，$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

解析：C_1圓心 $P(0,0)$，C_2 圓心 $Q(0,2)$，圓 C 之圓心 $R(x,y)$，圓 C 之半徑為 r

(1) $\overline{RP}=r+1$，$\overline{RQ}=7-r$ $\therefore$ $\overline{RP}+\overline{RQ}=8$，$\overline{PQ}=2$

中心為(0,1)之直橢圓為$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$

(2) $\overline{RP}=r-1$，$\overline{RQ}=7-r$ $\therefore$ $\overline{RP}+\overline{RQ}=6$，$\overline{PQ}=2$

中心為(0,1)之直橢圓為$\dfrac{x^2}{8}+\dfrac{(y-1)^2}{9}=1$

9、設橢圓之焦點為$(-2,2)$，又短軸落在直線 $x=2$ 上，且圖形通過($2+2\sqrt{3}$,0)，則(1)此橢圓之中心坐標為______，(2)此橢圓方程式為______。

答案：(2,2)，$\dfrac{(x-2)^2}{24}+\dfrac{(y-2)^2}{8}=1$

解析：中心為(2,2)，$c=4$，橢圓為橫橢圓，故可設其方程式為$\dfrac{(x-2)^2}{b^2+16}+\dfrac{(y-2)^2}{b^2}=1$， 代入點($2+2\sqrt{3}$,0)，可得$12b^2+4(b^2+16)=b^2(b^2+16)\Rightarrow b^4=64$，$b^2=8$

$\therefore$橢圓方程式為$\dfrac{(x-2)^2}{24}+\dfrac{(y-2)^2}{8}=1$

10、過點$P(\dfrac{3}{2}\sqrt{2},\ \sqrt{2})$，且與橢圓$\dfrac{x^2}{15}+\dfrac{y^2}{10}=1$共焦點的橢圓方程式為______。

答案：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$

11、將一圓$C: x^2+y^2=36$上的每一點到 y 軸的距離壓縮到原來的$\dfrac{1}{2}$，則所成的壓扁的圓Γ之方程式為______。

答案：$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{36}=1$

12、設橢圓之焦點爲$(-4,2)$，長軸上與此焦點最近之頂點爲$(-6,2)$，又短軸長爲 8，則橢圓方程式爲______。

答案：$\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

解析：橢圓 $a-c=2, b=4$，又 $a^2=b^2+c^2$ $\therefore$ $a=5, c=3$，

中心爲$(-1,2)$的横橢圓 $\frac{(x+1)^2}{25}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$

13、(1)橢圓 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{1}=1$ 的兩焦點坐標爲______。

(2)設一橢圓與已知橢圓 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{1}=1$ 共焦點，且過$(3,2)$，則此橢圓方程式爲______。

答案：(1)$(\sqrt{5},0)$，$(-\sqrt{5},0)$, (2) $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$

解析：(1) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{1}=1$ $\therefore$ $a=\sqrt{6}$，$b=1$，$c=\sqrt{5}$ $\therefore$ 焦點爲$(\sqrt{5},0)$，$(-\sqrt{5},0)$

(2)與 $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{1}=1$ 共焦點之橢圓爲 $\frac{x^2}{6+t}+\frac{y^2}{1+t}=1$，代入$(3,2)$

$\Rightarrow t^2-6t-27=0$ $\therefore t=9$ 或 -3（不合）

$\therefore$ 橢圓方程式爲 $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{10}=1$

14、過$(4,0)$且與 $x^2+y^2=36$ 相切之圓的圓心軌跡方程式爲______。

答案：$\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

解析：設過 $F(4,0)$且與 $x^2+y^2=36$ 相切之圓心爲 $P(x,y)$，半徑爲 r，則 $\overline{PF}=r$，O 爲原點，

$\overline{PO}=6-r$ $\therefore$ $\overline{PF}+\overline{PO}=6$

故其軌跡方程式爲橢圓中心$(2,0)$，$c=2$，$a=3$，$b=\sqrt{5}$

横橢圓爲 $\frac{(x-2)^2}{9}+\frac{y^2}{5}=1$

15、設 A 點在 x 軸上移動，M 爲 $\overline{AB}$ 的中點，且 M 點在 y 軸上移動，若 $\overline{AB}=4$，求 B 點的軌跡方程式______。

答案：$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{16}=1$

16、以橢圓$\Gamma: x^2+4y^2-2x+16y+1=0$ 的正焦弦爲兩邊的長方形面積=______。

答案：$8\sqrt{3}$

17、已知橢圓中心爲$(-3,-2)$，長軸有一端點爲$(-3,6)$，正焦弦之長爲 9，則其橢圓方程式爲______，又其兩焦點間的距離爲______。

答案：$\frac{(x+3)^2}{36}+\frac{(y+2)^2}{64}=1$，$4\sqrt{7}$

解析：$a=8$ 又 $\frac{2b^2}{a}=9$ $\therefore b=6$，又橢圓爲直橢圓

$\therefore$方程式爲 $\frac{(x+3)^2}{36}+\frac{(y+2)^2}{64}=1$，兩焦點間相距 $4\sqrt{7}$

四. 計算與證明題 (每題 10 分)

1、一橢圓之兩焦點及長軸之長如下，試求此橢圓之方程式。

(1) 兩焦點為 $(5, 2), (-3, 2)$，長軸之長為 10。

(2) 兩焦點為 $(-2, 5), (-2, -3)$，長軸之長為 12。

答案：

(1) 已知二焦點 $F(5, 2),\ F'(-3, 2)$

長軸之長 $2a = 10, a = 5, a^2 = 25$

中心 $\overline{FF'}$ 之中點 $(1, 2)$

$c = 5 - 1 = 4$

半短軸 $b = \sqrt{5^2 - 4^2} = 3, b^2 = 9$

焦點一左一右 橢圓是橫的

此橢圓之方程式為 $\dfrac{(x-1)^2}{25} + \dfrac{(y-2)^2}{9} = 1$

(2) 已知二焦點 $F(-2, 5),\ F'(-2, -3)$

長軸之長 $2a = 12, a = 6, a^2 = 36$

中心 $\overline{FF'}$ 之中點 $(-2, 1)$

$c = 5 - 1 = 4$

半短軸 $b = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{20}$, $b^2 = 20$

焦點一上一下 橢圓是豎的

此橢圓之方程式為 $\dfrac{(x+2)^2}{20} + \dfrac{(y-1)^2}{36} = 1$

2、設一動點 P 到(3,0)的距離等於它到直線 $x = \dfrac{16}{3}$ 之距離的 $\dfrac{3}{4}$，則動點 P 所形成之圖形方程式為何？

答案：設 $P(x , y)$，

$$\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = \frac{\left|x - \frac{16}{3}\right|}{1} \times \frac{3}{4} \Rightarrow 16[(x-3)^2 + y^2] = 9(x - \frac{16}{3})^2 \Rightarrow 7x^2 + 16y^2 = 112$$

3、試求下列各橢圓之中心，半長軸，半短軸，長軸兩端點，短軸兩端點，焦點，正焦弦之長。

(1) $x^2 + 4y^2 = 4$

(2) $9x^2 + 4y^2 - 36x + 8y + 4 = 0$

答案：(1) 原式 $x^2 + 4y^2 = 4$

除以 4 $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{1^2} = 1$

中心 $(0, 0)$

半長軸 $a = 2$

半短軸 $b = 1$

$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$

長軸兩端點　　　(2, 0), (–2, 0)

短軸兩端點　　　(0, 1), (0, –1)

焦點　　　　　　$(\sqrt{3}, 0), (-\sqrt{3}, 0)$

正焦弦之長　　　$\frac{2\cdot 1^2}{2}=1$

(2) 原式　　　　$9x^2+4y^2-36x+8y+4=0$

配方　　　　　　$9(x^2-4x+4)+4(y^2+2y+1)=36$

即　　　　　　　$9(x-2)^2+4(y+1)^2=36$

除以 36　　　　$\frac{(x-2)^2}{2^2}+\frac{(y+1)^2}{3^2}=1$

中心　　　　　　(2, –1)

半長軸　　　　　$a=3$

半短軸　　　　　$b=2$

　　　　　　　　$c=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$

長軸兩端點　　　$(2,\ -1\pm 3)$，即(2, 2), (2, –4)

短軸兩端點　　　$(2\pm 2, -1)$，即(4, –1), (0, –1)

焦點　　　　　　$(2, -1+\sqrt{5}), (2, -1-\sqrt{5})$

正焦弦之長　　　$\frac{2\cdot 2^2}{3}=\frac{8}{3}$

4、設 $\overline{AB}=6$，在 $\overline{AB}$ 上有一定點 P 且 $\overline{AP}:\overline{BP}$ =1：2，若點 A 在 x 軸上移動，點 B 在 y 軸上移動，則 P 點所形成之軌跡方程式爲何？

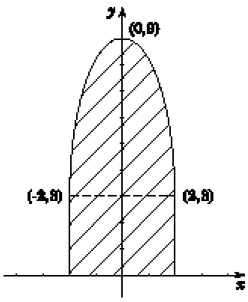
答案：設 $P(x,y)$　$\because \overline{AP}:\overline{BP}$ =1：2　$\therefore A(\frac{3}{2}x,0)$，$B(0,3y)$

又 $\overline{AB}=6$　$\therefore\ (\frac{3}{2}x)^2+(3y)^2=36$　$\therefore\ \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$

即爲 P 點之軌跡方程式

5、試作出 $0\le y\le 3(1+\sqrt{4-x^2})$ 所表區域之圖形，並求出此區域面積爲何？

答案：



$y=3(1+\sqrt{4-x^2})$，$(\frac{y-3}{3})^2=4-x^2$　且 $y\ge 3$

$\therefore x^2+\frac{(y-3)^2}{9}=4$　$\therefore \frac{x^2}{4}+\frac{(y-3)^2}{36}=1$ 且 $y\ge 3$ 爲上半橢圓

又 $-2\le x\le 2$

面積爲 $\frac{1}{2}\times\pi\times 2\times 6+4\times 3=6\pi+12$